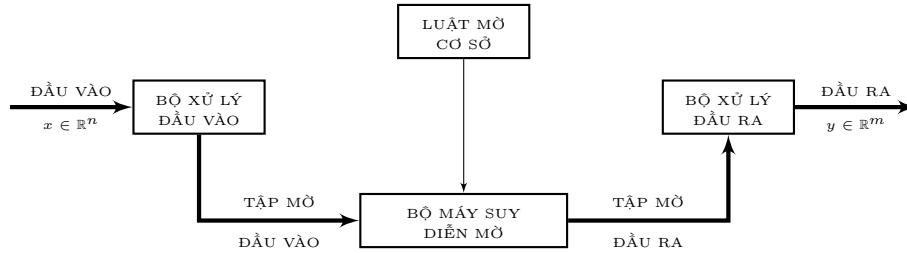


Một ví dụ thực tế phương trình đạo hàm riêng mờ

Lý thuyết tập mờ là một công cụ toán học để mô tả các hiện tượng không chắc chắn ví dụ như số lượng cá thể trong quần thể, môi trường, tốc độ di chuyển dân số và sự phân bố dân số không đồng đều hay cung cấp các khái niệm quan trọng để mô hình hóa các hiện tượng dịch tễ học. Do đó, mục đích của nghiên cứu này là tìm một nghiệm số cho mô hình hóa sự có mặt của quần thể kiến, coi sự phân bố và tốc độ di chuyển dân số như một tham số mờ.

1. Các khái niệm cơ bản

Một khái niệm có vai trò quan trọng để xây dựng mô hình toán học mờ này là hệ quy tắc cơ bản mờ, tính chất của nó được thể hiện trong hình 1.



Hình 1: Cấu trúc hệ quy tắc cơ bản mờ

Hệ quy tắc cơ bản mờ (FRBS) có 4 phần: bộ xử lý đầu vào, luật mờ cơ sở, bộ máy suy diễn mờ và bộ xử lý đầu ra. Quá trình đưa các giá trị đầu vào thực chuẩn bị cho các giá trị đầu ra thực diễn ra như sau:

- Bộ xử lý đầu vào: Ở đây yếu tố đầu vào được chuyển thành tập mờ của các không gian tương ứng. Cách tiếp cận số liệu đầu vào được sử dụng phổ biến nhất là làm thay đổi một giá trị thực thành một tập mờ duy nhất.
- Luật mờ cơ sở: Đây là khâu chủ yếu, mã hóa các thông tin cấu thành hệ các quy tắc cơ bản mờ. Nó bao gồm tập các mệnh đề có điều kiện mờ trong hình thức "Nếu thì". Các quy tắc mờ đưa ra phương pháp hiệu quả để mã hóa các kiến thức chuyên môn thể hiện dưới hình thức ngôn ngữ. Về cơ bản, các quy tắc mờ là những mối quan hệ mờ của tích Cartesian của các không gian biến cần quan tâm. Trường hợp đặc biệt, một quy tắc mờ dạng "Nếu X là A thì Y là B" được định nghĩa như $A \times B$, tích Cartesian của A và B, tức là một quan hệ mờ mà có hàm thuộc là:

$$(A \times B)(x, y) = \min(A(x), B(y)), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

Trong trường hợp này, $A \times B$ có thể được giải thích như là một điểm mờ của $X \times Y$.

- Bộ máy suy diễn mờ: Bộ máy suy diễn mờ thực hiện gần đúng lý luận bằng cách sử dụng các quy tắc suy diễn cục bộ. Một hình thức suy diễn mờ đặc biệt được sử dụng ở đây là phương pháp Mamdani [3]. Trong trường hợp này, mỗi quy tắc mờ là một điểm mờ, tức là, mỗi phát biểu "Nếu thì" là tích Cartesian giữa một quy tắc tiền đề (mệnh đề nếu) và kết quả (mệnh đề thì). Luật mờ cơ sở là một mối quan hệ được xác định bởi sự kết hợp của nhiều mối quan hệ. Sự kết hợp của các mệnh đề trong quy tắc tiền đề cũng tạo ra mối quan hệ mờ bởi tích Cartesian. Một ví dụ đơn giản về một FRBS với hai quy tắc trong luật mờ cơ sở được thể hiện như sau:

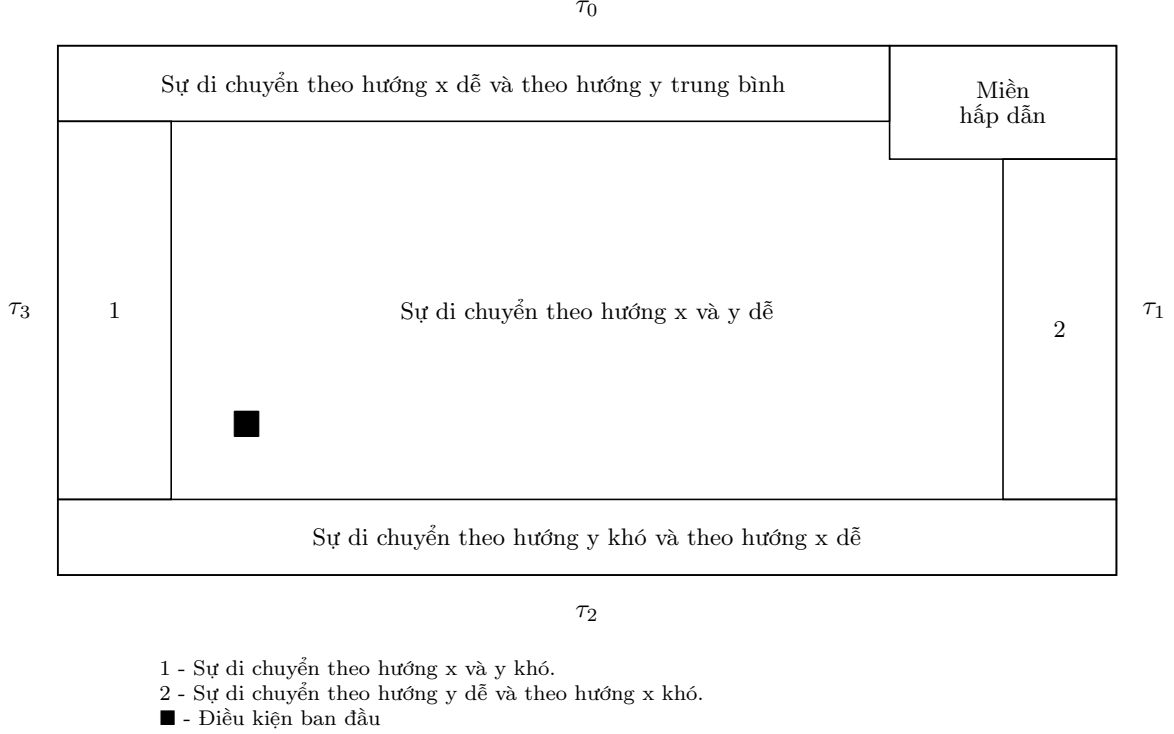
- Nếu x là A_1 , và y là B_1 thì z là C_1 .
- Nếu x là A_2 , và y là B_2 thì z là C_2 .

- Bộ xử lý đầu ra: Trong hệ các quy tắc cơ bản mờ, đầu ra thường là một tập mờ. Tuy nhiên trong các mô hình đặc biệt, chúng tôi thường yêu cầu đầu ra là một số thực. Bộ xử lý đầu ra là một bộ phận cung cấp đầu ra thực, mỗi tiến trình thường chọn một số thực đại diện cho các tập mờ tương ứng. Bộ xử lý đầu ra - một trong những ý tưởng được thông qua bài báo này là tâm điểm của phương pháp trọng lực, được định nghĩa như sau: Cho C là hàm thành phần của biến đầu ra z. Khi đó, giá trị đầu ra thực \bar{z} được chọn như sau:

$$\bar{z} = \frac{\int zC(z)dz}{\int C(z)dz} \quad (1)$$

Các mối quan hệ được mô tả trong hình thức "Nếu thì" thường liên quan đến việc mô tả các biến bằng ngôn ngữ như: Nếu dân số là lớn và sự di chuyển tổng thể là khó thì sự phân bố chậm. Trong lý thuyết tập mờ, giá trị của một biến là ngôn ngữ được gọi là biến ngôn ngữ.

Giả sử hàm biến $P = P(x, t)$ cho biết số dân tại thời điểm $t \in [0, T]$ và $x \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, α là một hằng số trên Ω_1 (hình 2).



Hình 2: Miền xác định Ω_1

Mô hình sự chiếm lĩnh của loài kiến xén lá sẽ được nghiên cứu bằng phương trình đạo hàm riêng có dạng:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v(loc) \cdot \nabla P - \nabla \cdot (\alpha(P, loc_{tot}) \nabla P) = 0 \quad (2)$$

trong đó $\alpha(P, loc_{tot})$ là sự phân bố dân số, (loc_{tot}) là sự di chuyển tổng thể được xác định bởi một hệ quy tắc cơ bản mờ phụ thuộc vào các biến đầu vào loc_x và loc_y .

Tốc độ di chuyển dân số là $v(loc) = (v_1(loc_y), v_2(loc_x))$, trong đó $loc = (loc_x, loc_y)$ là hàm vectơ, cung cấp các giá trị cho sự di chuyển theo x và y. Tốc độ này phụ thuộc vào các khu vực nhỏ của miền, cho biết sự khó khăn của loài kiến trong việc di chuyển trên địa hình. Các tham số mờ được mô hình hóa như sau:

- Miền được chia thành các miền nhỏ hơn.
- Các đặc điểm của môi trường, trong đó sự di chuyển của các cá thể được biểu diễn bởi các hàm bậc thang cho thấy mức độ khó khăn trong sự di chuyển thông qua miền.

Các điều kiện biên được xét bao gồm:

$$\alpha(P, loc_{tot}) \frac{\partial P}{\partial y} = P v_2(loc_x), \forall x \in \tau_0, \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

$$\alpha(P, loc_{tot}) \frac{\partial P}{\partial x} = P v_1(loc_y), \forall x \in \tau_1, \forall t \in [0, T] \quad (4)$$

$$\alpha(P, loc_{tot}) \frac{\partial P}{\partial y} = Pv_2(loc_x), \forall x \in \tau_2, \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

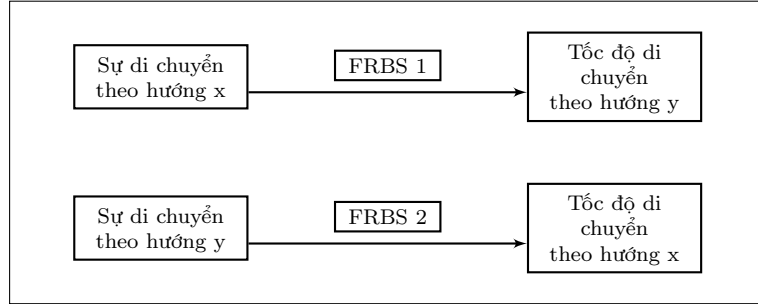
$$\alpha(P, loc_{tot}) \frac{\partial P}{\partial x} = Pv_1(loc_y), \forall x \in \tau_3, \forall t \in [0, T] \quad (6)$$

cùng với điều kiện ban đầu được cho bởi :

$$P(x, 0) = P_0(x), \forall x \in \Omega_1 \quad (7)$$

2. Xây dựng biến ngôn ngữ và cơ sở nguyên tắc

Tập mờ là một cách để thể hiện thông tin và kiến thức không chính xác. Tốc độ di chuyển theo x (theo y) là biến đầu ra trong hệ quy tắc cơ bản mờ (FRBS2) (tương ứng FBS1) phụ thuộc vào sự di chuyển theo hướng y (theo hướng x) thể hiện trong hình 3.



Hình 3: Hệ quy tắc cơ bản mờ 1 và 2

Tốc độ di chuyển theo $x(v_1)$ và $y(v_2)$ được thể hiện bởi thuật ngữ rất chậm, chậm, trung bình, nhanh. Tốc độ di chuyển theo x và y khác nhau từ 0,105 đến 0,17m/h và từ 0,04 đến 0,1m/h. Các giá trị của sự di chuyển theo x và y thể hiện bởi thuật ngữ không đổi, khó, trung bình, dễ trong khi các giá trị của dân số (P) được thể hiện trong tập thuật ngữ rất nhỏ, nhỏ, trung bình, lớn và rất lớn.

Quy tắc cơ bản FRBS1:

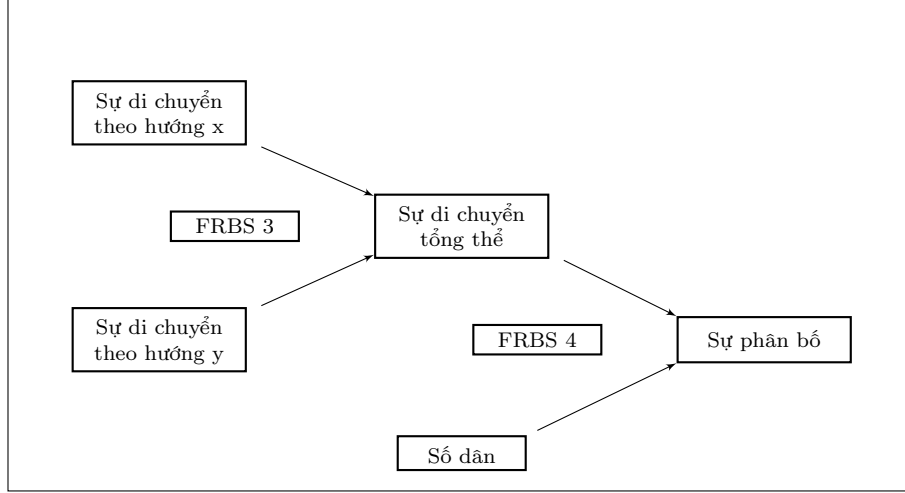
- Nếu sự di chuyển theo x là không đổi thì v_2 là không đổi.
- Nếu sự di chuyển theo x là dễ thì v_2 trung bình.
- Nếu sự di chuyển theo x là trung bình thì v_2 là khó.
- Nếu sự di chuyển theo x là khó thì v_2 là chậm.

Quy tắc cơ bản FRBS2:

- Nếu sự di chuyển theo y là không đổi thì v_1 là không đổi.
- Nếu sự di chuyển theo y là dễ thì v_1 trung bình.
- Nếu sự di chuyển theo y là trung bình thì v_1 là khó.
- Nếu sự di chuyển theo y là khó thì v_1 là trung bình.

Sự di chuyển tổng thể là biến đầu ra trong hệ quy tắc cơ bản mờ (FRBS3) phụ thuộc vào sự di chuyển theo x và sự di chuyển theo y. Sự phân bố là biến đầu ra trong hệ quy tắc cơ bản mờ (FRBS4) phụ thuộc vào sự di chuyển tổng thể và số dân (hình 4).

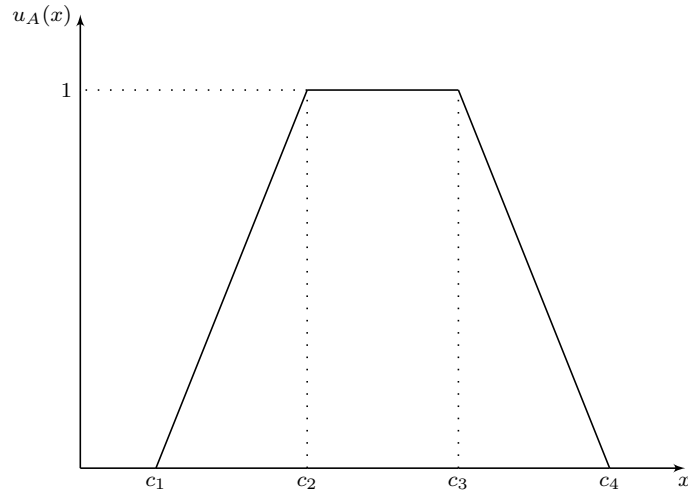
Sự phân bố dân số thay đổi từ 0,08 đến 0,2m²/h, do đó kết quả của những tính toán một phần miền Ω_1 bằng 0,14m²/h được coi là giá trị trung bình của sự phân bố trong mô hình này. Sự di chuyển tổng thể được thể hiện bởi các thuật ngữ không đổi, rất khó, khó, trung bình, dễ.



Hình 4: Hệ quy tắc cơ bản mờ 3 và 4

3. Các tính toán mô phỏng mờ

Để định nghĩa kiểu di chuyển của loài kiến như là một hàm cơ bản (ví dụ: sông, đồi, núi...) trong lĩnh vực nghiên cứu, mỗi nút được cho một giá trị trên $[0, 1]$ đối với sự dịch chuyển theo x và y tại vị trí của nó trên khu vực (hình 5).



Hình 5: Tham số hình thang của các hàm thuộc

Hàm thuộc hình thang được chọn liên kết với một tập mờ A , $u_A(x)$ liên quan đến 4 tham số $[c_1, c_2, c_3, c_4]$ được cho bởi:

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{x - c_1}{c_2 - c_1} & \text{nếu } c_1 \leq x \leq c_2 \\ 1 & \text{nếu } c_2 \leq x \leq c_3 \\ \frac{-x + c_4}{c_4 - c_3} & \text{nếu } c_3 \leq x \leq c_4 \end{cases} \quad (8)$$

+ Nếu các yếu tố thuộc tam giác nằm trong khu vực di chuyển khó, giá trị cho sự di chuyển trong các yếu tố này được tính bởi $c_1 + (c_4 - c_1) * rand$, trong đó $rand$ là giá trị ngẫu nhiên trong khoảng $(0, 1)$, $c_1 = 0, c_4 = 0,45$.

+ Nếu các yếu tố thuộc tam giác nằm trong khu vực di chuyển trung bình, giá trị cho sự di chuyển trong các yếu tố này được tính bởi $c_1 + (c_4 - c_1) * rand$, trong đó $rand$ là giá trị ngẫu nhiên trong khoảng $(0, 1)$, $c_1 = 0,05, c_4 = 0,95$.

+ Nếu các yếu tố thuộc tam giác nằm trong khu vực di chuyển dễ, giá trị cho sự di chuyển trong các yếu tố này được tính bởi $c_1 + (1 - c_1) * rand$.

Như vậy, những giá trị của x trong khoảng $(0, 1)$ đại diện cho mức độ di chuyển dễ dàng khác nhau từ $c_1 = 0,548$ đến 1. Sự di chuyển theo hướng x và y trong mỗi tam giác được xác định ngẫu nhiên tùy thuộc vào miền xác định của hàm phù hợp tương ứng với việc phân loại các miền Ω_1 . Đối với sự di chuyển theo chiều dọc và chiều ngang, các yếu tố của tam giác của miền hấp dẫn được đặt giá trị 0. Do đó, mỗi yếu tố của tam giác nhận được một giá trị đối với sự di chuyển theo x và y .

Để có được kết quả đầu ra mờ cho mỗi yếu tố của tam giác, với hệ FBR2, chúng tôi sử dụng giá trị trung bình của dân số trên mỗi nút ba, giả sử một xấp xỉ tuyến tính đối với α phụ thuộc vào hướng mờ trên mỗi phần tử kiến cho $t = t_n + \frac{\Delta t}{2}$.

Để tính toán số dân trên biên τ_0 và τ_2 , chúng tôi xác định tốc độ di chuyển theo y tùy thuộc vào sự di chuyển theo x cho các tam giác thuộc τ_0 và τ_2 . Để tính toán số dân P trên biên τ_1 và τ_3 , chúng tôi xác định tốc độ di chuyển theo x tùy thuộc vào sự di chuyển theo y cho các tam giác thuộc τ_1 và τ_3 . Điều này cũng đảm bảo rằng $div(v) = 0$.

Rõ ràng, mô hình toán học mờ ở trên đã khai thác được các tham số không chắc chắn mà các mô hình toán học cổ điển trước đây không thực hiện được. Hơn nữa, việc mô tả được thực hiện với mô hình mờ sẽ sinh động hơn việc mô tả các hiện tượng sinh học được nghiên cứu trước đây. Trong mô hình mờ, sự phân bố dân số là một tham số mờ phụ thuộc vào số dân và sự di chuyển tổng thể của loài kiến, có liên quan đến điều kiện thuận lợi hoặc khó khăn của việc di chuyển mà loài kiến sẽ phải đối mặt tùy thuộc vào địa hình mà chúng đi qua. Trong mô hình này tốc độ di chuyển theo hướng x và y cũng là tham số mờ phụ thuộc vào sự di chuyển theo hướng x hoặc y tương ứng.